

Вестник Курганской ГСХА. 2022. № 2 (42). С. 53-62
Vestnik Kurganskoy GSKhA. 2022; (2-42): 53-62

Научная статья

УДК 531.391

Код ВАК 4.3.1.

DOI: 10.52463/22274227_2022_42_53

EDN: GPERFP

ДИНАМИКА ТРОГАНИЯ СОСТАВНОГО СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОГО ТРАНСПОРТНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА С УПРУГИМИ СЦЕПКАМИ

Игорь Павлович Попов^{1✉}, Владимир Геннадьевич Чумаков², Сергей Сергеевич Родионов³
^{1, 2, 3}Курганская государственная сельскохозяйственная академия имени Т.С. Мальцева,
Курган, Россия

¹ip.popow@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8683-0387>

²rectorat@ksaa.zaural.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1964-7202> ???

³polytech@kgsu.ru

Аннотация. Цель исследования – математическое описание динамики трогания составного сельскохозяйственного транспортно-технологического комплекса с упругими сцепками. **Методика.** Применяется классический метод теоретической механики для описания динамики материальной системы, в основе которого лежит составление и решение линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Существенной особенностью, характерной для настоящего аналитического исследования, является многозвенный состав исследуемого динамического объекта, что влечет за собой необходимость составления дифференциальных уравнений для каждой составной части транспортно-технологического средства. Таким образом, количество исходных дифференциальных уравнений необходимо равно числу составных частей транспортно-технологического средства. При этом исходные уравнения образуют систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Ключевой особенностью решения системы дифференциальных уравнений является то, что при исключении одного из уравнений порядок результирующего повышается на порядок исключенного. Таким образом, задача для трактора и одного прицепного агрегата сводится к решению дифференциального уравнения четвертого порядка с постоянными коэффициентами, а для трактора и двух прицепных агрегатов – к решению дифференциального уравнения

шестого порядка. Другой существенной особенностью рассматриваемой задачи является наличие таких исходных параметров, как силы, инертные массы и упругие элементы, что неизбежно приводит к появлению в составе общих решений дифференциальных уравнений гармонических составляющих, для преодоления отрицательного влияния которых на динамику транспортно-технологического средства необходимо предусматривать специальные меры, в том числе, на уровне конструкторских решений. **Результатами** являются окончательные решения систем дифференциальных уравнений, доставляющие формулы для перемещений, скоростей и ускорений трактора и прицепных агрегатов. **Научная новизна** заключается в математическом доказанном весьма существенном увеличении всех кинематических параметров трактора при трогании с места по сравнению с аналогичными параметрами для составного сельскохозяйственного транспортно-технологического комплекса с недеформируемыми сцепками.

Ключевые слова: сельскохозяйственный секционный технологический комплекс, трогание, сцепки, трение, перемещение, скорость.

Для цитирования: Попов И.П., Чумаков В.Г., Родионов С.С. Динамика трогания составного сельскохозяйственного транспортно-технологического комплекса с упругими сцепками // Вестник Курганской ГСХА. 2022. № 2 (42). С. 53-62. https://doi.org/10.52463/22274227_2022_42_53

Scientific article

DRIVING DYNAMICS OF A COMPOSED AGRICULTURAL TRANSPORTATION AND TECHNOLOGICAL COMPLEX WITH ELASTIC HITCHINGS

Igor P. Popov^{1✉}, Vladimir G. Chumakov², Sergey S. Rodionov³

^{1, 2, 3, 4}Kurgan State Agricultural Academy named after T.S. Maltsev, Kurgan, Russia

¹ip.popow@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8683-0387>

²rectorat@ksaa.zaural.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1964-7202> ???

³polytech@kgsu.ru

Abstract. The purpose of the work is a mathematical description of the starting dynamics of a composite agricultural transport and technological complex with elastic hitchings. **Methodology.** The classical method of theoretical mechanics is used to describe the dynamics of a material

system, which is based on the compilation and solution of linear differential equations of the second order with constant coefficients. An essential feature characteristic of this analytical study is the multi-link composition of the dynamic object under study, which entails the need to draw up

differential equations for each component of the transport and technological means. Thus, the number of initial differential equations is necessary equal to the number of components of the transport and technological means. In this case, the original equations form a system of linear differential equations with constant coefficients. A key feature of solving a system of differential equations is the following, when one of the equations is excluded, the order of the resulting one increases by an order of magnitude of the excluded. Thus, the problem for a tractor and one trailed unit is reduced to solving a fourth order differential equation with constant coefficients, and for a tractor and two trailed units - to solving a sixth order differential equation. Another essential feature of the problem under consideration is the presence of such initial parameters as forces, inert masses and elastic elements, which inevitably leads to the appearance of harmonic components in the general solutions of differential equations, in order to overcome the negative influence of which on the dynamics of a

Введение. Сила трения покоя значительно превосходит силу трения движения. Это приводит к тому, что режим трогания для составного сельскохозяйственного транспортно-технологического средства является наиболее тяжелым [1, 2]. Многие движущиеся сельскохозяйственные технологические комплексы выполнены секционными в составе трактора и прицепных агрегатов [3-7]. К ним относятся почвообрабатывающие [8], культиваторные [9], уборочные [10, 11], транспортные и другие комплексы. Проблемы трогания таких комплексов сопряжены с повышенными требованиями к трактору по мощности, тяговому усилию и сопровождаются перерасходом топлива.

Эффективным способом трогания составного транспортно-технологического средства является выбор зазоров в сцепках. При этом секции приводятся в движение последовательно, и инертная масса, а также сила трения покоя непосредственно в момент трогания минимальны. Этот способ, однако, имеет два существенных недостатка – малую фиксированную величину зазоров в сцепках, что ограничивает эффективность способа и ударный характер передачи импульса, что отрицательно сказывается на состоянии конструктивных элементов транспортно-технологического комплекса [12]. Указанных недостатков можно избежать, если использовать упруго деформируемые сцепки.

Целью работы является построение математической модели обеспечения «легкого» трогания составного сельскохозяйственного транспортно-технологического средства с упругими сцепками.

Методика. Основными методами исследования в рамках настоящей работы являются методы математического моделирования и анализа. Используемые методы позволяют получить аналитическое описание исследуемых объектов.

Расчет механической системы в составе массивных трактора, прицепных агрегатов и

транспорт и технологический vehicle, special measures must be provided including the level of design solutions. **The results** are the final solutions to systems of differential equations, delivering formulas for the displacements, speeds and accelerations of the tractor and trailed implements. **The scientific novelty** lies in the mathematically proven very significant increase in all the kinematic parameters of the tractor when starting off in comparison with similar parameters for a composite agricultural transport and technological complex with non-deformable couplings.

Keywords: agricultural sectional technological complex, starting, couplings, friction, movement, speed.

For citation: Popov I.P., Chumakov V.G., Rodionov S.S. Driving dynamics of a composed agricultural transportation and technological complex with elastic hitchings. Vestnik Kurganskoy GSKhA. 2022; (2-42): 53-62. https://doi.org/10.52463/22274227_2022_42_53 (In Russ).

упругих сцепок является достаточно громоздким. Для его минимизации принимаются следующие допущения: сила F (Н), развиваемая трактором, – величина постоянная; массы трактора и прицепных агрегатов равны между собой и составляют m (кг) (например, МТЗ-100 массой 3,75 т и прицеп с грузом такой же массы).

Результаты. Трактор и один прицепной агрегат. Уравнение сил, приложенных к трактору, имеет вид:

$$F = m \frac{d^2 x_1}{dt^2} + k(x_1 - x_2), \quad (1)$$

где x_1, x_2 (м) – перемещение, соответственно, трактора и прицепного агрегата; k (Н/м) – коэффициент упругости сцепки. Рассеивание энергии не учитывается. Расчетная схема ввиду ее предельной простоты не приводится.

Силы, приложенные к прицепному агрегату, удовлетворяют уравнению:

$$0 = m \frac{d^2 x_2}{dt^2} - k(x_1 - x_2).$$

Из последнего уравнения следует

$$x_1 = \frac{m}{k} \frac{d^2 x_2}{dt^2} + x_2. \quad (2)$$

Подстановка этого выражения в (1) дает

$$\begin{aligned} F &= \frac{m^2}{k} \frac{d^4 x_2}{dt^2} + m \frac{d^2 x_2}{dt^2} + m \frac{d^2 x_2}{dt^2} + kx_2 - kx_2 = \\ &= \frac{m^2}{k} \frac{d^4 x_2}{dt^2} + 2m \frac{d^2 x_2}{dt^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{Пусть } \frac{d^2 x_2}{dt^2} = z. \quad (4)$$

Тогда (3) запишется в виде

$$z'' + 2\frac{k}{m}z = \frac{kF}{m^2}.$$

Характеристическое уравнение

$$r^2 + 2\frac{k}{m} = 0.$$

Его корни равны $r_{1,2} = \pm i\sqrt{2\frac{k}{m}}$.

Общее решение соответствующего однородного уравнения

$$z_1 = C_1 \cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t + C_2 \sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t.$$

Частное решение в соответствии с (5) имеет вид

$$z_2 = A.$$

Подстановка его в (5) дает

$$2\frac{k}{m}A = \frac{kF}{m^2}, \quad A = \frac{F}{2m}.$$

Общее решение уравнения (5) находится как

$$z = z_1 + z_2 = C_1 \cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t + C_2 \sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t + \frac{F}{2m}.$$

В момент времени $t = 0$ сцепка не деформирована, следовательно, на прицепной агрегат сила не действует и величина (4) равна нулю. Поэтому для $t = 0$ последнее выражение примет вид:

$$z(0) = 0 = C_1 \cos\sqrt{2\frac{k}{m}}0 + C_2 \sin\sqrt{2\frac{k}{m}}0 + \frac{F}{2m},$$

$$C_1 = -\frac{F}{2m}.$$

С учетом этого

$$z = -\frac{F}{2m} \cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t + C_2 \sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t + \frac{F}{2m}, \quad (6)$$

В соответствии с (4)

$$(5) \quad v_2 = \int z dt = -\frac{F}{2m} \sqrt{\frac{m}{2k}} \sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t - C_2 \sqrt{\frac{m}{2k}} \cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t + \frac{F}{2m}t + C_3,$$

$$x_2 = \int v_2 dt = \frac{F}{4k} \cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t -$$

$$- C_2 \frac{m}{2k} \sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t + \frac{F}{4m}t^2 + C_3t + C_4. \quad (7)$$

С учетом (2), (4), (6) и (7)

$$x_1 = -\frac{F}{2k} \cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t + C_2 \frac{m}{k} \sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t + \frac{F}{2k} + \frac{F}{4k}$$

$$\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t - C_2 \frac{m}{2k} \sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t + \frac{F}{4m}t^2 + C_3t + C_4,$$

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{F}{2k} \sqrt{2\frac{k}{m}} \sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t + C_2 \sqrt{2\frac{k}{m}} \frac{m}{k}$$

$$\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t - \frac{F}{4k} \sqrt{2\frac{k}{m}} \sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t -$$

$$- C_2 \sqrt{2\frac{k}{m}} \frac{m}{2k} \cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t + \frac{F}{2m}t + C_3,$$

$$a_1 = \frac{dv_1}{dt} = \frac{F}{2k} 2\frac{k}{m} \cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t - C_2 2\frac{k}{m} \frac{m}{k} \sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t -$$

$$- \frac{F}{4k} 2\frac{k}{m} \cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t + C_2 2\frac{k}{m} \frac{m}{2k} \sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t + \frac{F}{2m}.$$

$$x_2(0) = 0 = \frac{F}{4k} \cos\sqrt{2\frac{k}{m}}0 - C_2 \frac{m}{2k} \sin\sqrt{2\frac{k}{m}}0 +$$

$$+ \frac{F}{4m}0^2 + C_30 + C_4,$$

$$\frac{F}{4k} + C_4 = 0, \quad C_4 = -\frac{F}{4k}.$$

$$v_2(0) = 0 = -C_2 \sqrt{\frac{m}{2k}} + C_3,$$

$$v_1(0) = 0 = C_2 \sqrt{2 \frac{k}{m} \frac{m}{k}} - C_2 \sqrt{2 \frac{k}{m} \frac{m}{2k}} + C_3 =$$

$$= C_2 \sqrt{2 \frac{k}{m} \frac{m}{2k}} + C_3,$$

$$\begin{cases} -C_2 \sqrt{\frac{m}{2k}} + C_3 = 0 \\ C_2 \sqrt{\frac{m}{2k}} + C_3 = 0 \end{cases}, C_2 = 0, C_3 = 0.$$

Окончательное решение:

$$x_1 = -\frac{F}{4k} \cos \sqrt{\frac{2k}{m}} t + \frac{F}{4m} t^2 + \frac{F}{4k},$$

$$x_2 = \frac{F}{4k} \cos \sqrt{\frac{2k}{m}} t + \frac{F}{4m} t^2 - \frac{F}{4k},$$

$$v_1 = \frac{F}{2\sqrt{2km}} \sin \sqrt{\frac{2k}{m}} t + \frac{F}{2m} t,$$

$$v_2 = -\frac{F}{2\sqrt{2km}} \sin \sqrt{\frac{2k}{m}} t + \frac{F}{2m} t,$$

$$a_1 = \frac{F}{2m} \cos \sqrt{\frac{2k}{m}} t + \frac{F}{2m},$$

$$a_2 = -\frac{F}{2m} \cos \sqrt{\frac{2k}{m}} t + \frac{F}{2m}.$$

Характерный отрезок времени τ_2 (индекс «₂» означает количество составных частей сельскохозяйственного транспортно-технологического средства) для рассматриваемого случая определяется из условия максимального растяжения упругой сцепки. При этом

$$a_1(\tau_2) - \frac{F}{2m} = 0 \text{ или } \frac{F}{2m} \cos \sqrt{\frac{2k}{m}} \tau_2 = 0,$$

$$\sqrt{2 \frac{k}{m}} \tau_2 = \frac{\pi}{2}, \tau_2 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{2k}}.$$

За время τ_2 трактор пройдет расстояние

$$x_1(\tau_2) = -\frac{F}{4k} \cos \sqrt{\frac{2k}{m}} \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{2k}} + \frac{F}{4m} \frac{\pi^2}{4} \frac{m}{2k} +$$

$$+ \frac{F}{4k} = \frac{F\pi^2}{32k} + \frac{F}{4k}$$

и разовьет скорость

$$v_1(\tau_2) = \frac{F}{2\sqrt{2km}} \sin \sqrt{\frac{2k}{m}} \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{2k}} +$$

$$+ \frac{F}{2m} \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{2k}} = \frac{F}{2\sqrt{2km}} + \frac{F\pi}{4\sqrt{2km}}.$$

Уместно сравнить эти показатели с соответствующими величинами для недеформируемого составного сельскохозяйственного транспортно-технологического средства.

$$a = \frac{F}{2m}, v = \frac{F}{2m} t, x = \frac{F}{4m} t^2,$$

$$x(\tau_2) = \frac{F}{4m} \frac{\pi^2}{4} \frac{m}{2k} = \frac{F\pi^2}{32k},$$

$$v(\tau_2) = \frac{F}{2m} \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{2k}} = \frac{F\pi}{4\sqrt{2km}}.$$

$$\frac{x_1(\tau_2)}{x(\tau_2)} = \frac{F\pi^2/(32k) + F/(4k)}{F\pi^2/(32k)} = 1 + \frac{32}{4\pi^2} \approx 1,81$$

$$\frac{v_1(\tau_2)}{v(\tau_2)} = \frac{F/(2\sqrt{2km}) + F\pi/(4\sqrt{2km})}{F\pi/(4\sqrt{2km})} = 1 + \frac{2}{\pi} \approx 1,64$$

Отношение для кинетических энергий трактора составляет

$$\frac{E_1(\tau_2)}{E(\tau_2)} = 2,69.$$

Полученные соотношения наглядно демонстрируют, что трогание составного сельскохозяйственного транспортно-технологического средства с упругими сцепками значительно легче, чем недеформируемого. Другими словами, за время τ_2 трактор пройдет в 1,81 раза большее расстояние и разовьет в 1,64 раза большую скорость и в 2,69 раза большую кинетическую энергию.

Трактор и два прицепных агрегата. Урав-

нения сил, приложенных, соответственно, к трактору и прицепным агрегатам, имеют вид:

$$F = m \frac{d^2 x_1}{dt^2} + k(x_1 - x_2), \tag{8}$$

$$k(x_1 - x_2) = m \frac{d^2 x_2}{dt^2} + k(x_2 - x_3), \tag{9}$$

$$k(x_2 - x_3) = m \frac{d^2 x_3}{dt^2}.$$

Из последнего уравнения следует

$$x_2 = \frac{m}{k} \frac{d^2 x_3}{dt^2} + x_3. \tag{10}$$

Производная этого выражения равна

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{m}{k} \frac{d^4 x_3}{dt^4} + \frac{d^2 x_3}{dt^2}.$$

Подстановка последних двух выражений в (9) дает

$$x_1 = \frac{m}{k} \frac{d^2 x_2}{dt^2} + 2x_2 - x_3 = \frac{m^2}{k^2} \frac{d^4 x_3}{dt^4} + \frac{m}{k} \frac{d^2 x_3}{dt^2} + 2 \frac{m}{k} \frac{d^2 x_3}{dt^2} + 2x_3 - x_3 = \frac{m^2}{k^2} \frac{d^4 x_3}{dt^4} + 3 \frac{m}{k} \frac{d^2 x_3}{dt^2} + x_3. \tag{11}$$

Производная этого выражения равна

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{m^2}{k^2} \frac{d^6 x_3}{dt^6} + 3 \frac{m}{k} \frac{d^4 x_3}{dt^4} + \frac{d^2 x_3}{dt^2}.$$

Подстановка полученных выражений в (8) дает

$$\begin{aligned} \frac{F}{k} &= \frac{m^3}{k^3} \frac{d^6 x_3}{dt^6} + 3 \frac{m^2}{k^2} \frac{d^4 x_3}{dt^4} + \frac{m}{k} \frac{d^2 x_3}{dt^2} + \frac{m^2}{k^2} \frac{d^4 x_3}{dt^4} + \\ &+ 3 \frac{m}{k} \frac{d^2 x_3}{dt^2} + x_3 - \frac{m}{k} \frac{d^2 x_3}{dt^2} - x_3 = \\ &= \frac{m^3}{k^3} \frac{d^6 x_3}{dt^6} + 4 \frac{m^2}{k^2} \frac{d^4 x_3}{dt^4} + 3 \frac{m}{k} \frac{d^2 x_3}{dt^2}, \\ \frac{d^6 x_3}{dt^6} + 4 \frac{k}{m} \frac{d^4 x_3}{dt^4} + 3 \frac{k^2}{m^2} \frac{d^2 x_3}{dt^2} &= \frac{k^2 F}{m^3}. \end{aligned} \tag{12}$$

$$\text{Пусть } \frac{d^2 x_3}{dt^2} = z. \tag{13}$$

Тогда (12) запишется в виде

$$z'''' + 4 \frac{k}{m} z'' + 3 \frac{k^2}{m^2} z = \frac{k^2 F}{m^3}. \tag{14}$$

Характеристическое уравнение

$$r^4 + 4 \frac{k}{m} r^2 + 3 \frac{k^2}{m^2} = 0.$$

$$r_{1,2}^2 = -2 \frac{k}{m} \pm \frac{k}{m}, \quad r_1^2 = -3 \frac{k}{m}, \quad r_2^2 = -\frac{k}{m},$$

$$r_{1,2} = \pm i \sqrt{3 \frac{k}{m}}, \quad r_{3,4} = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\begin{aligned} z_1 &= C_1 \cos \sqrt{3 \frac{k}{m}} t + C_2 \sin \sqrt{3 \frac{k}{m}} t + \\ &+ C_3 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_4 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t. \end{aligned}$$

Частное решение имеет вид $z_2 = A$.

Подстановка его в (14) дает

$$3 \frac{k^2}{m^2} A = \frac{k^2 F}{m^3}, \quad A = \frac{F}{3m}.$$

Общее решение находится как

$$\begin{aligned} z &= z_1 + z_2 = C_1 \cos \sqrt{\frac{3k}{m}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{3k}{m}} t + \\ &+ C_3 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_4 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t + \frac{F}{3m}. \end{aligned} \tag{15}$$

В соответствии с (13)

$$v_3 = \int z dt = C_1 \sqrt{\frac{m}{3k}} \sin \sqrt{\frac{3k}{m}} t - C_2 \sqrt{\frac{m}{3k}} \cos \sqrt{\frac{3k}{m}} t +$$

$$+C_3\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t - C_4\sqrt{\frac{m}{k}}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{3m}t + C_5, \quad (16)$$

$$x_3 = \int v_3 dt = -C_1\frac{m}{3k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t - C_2\frac{m}{3k}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t - C_3\frac{m}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t - C_4\frac{m}{k}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{6m}t^2 + C_5t + C_6, \quad (17)$$

С учетом (10), (13), (15) и (17)

$$x_2 = \frac{m}{k}C_1\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{m}{k}C_2\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{m}{k}C_3\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{m}{k}C_4\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{m}{k}\frac{F}{3m} - C_1\frac{m}{3k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t - C_2\frac{m}{3k}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t - C_3\frac{m}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t - C_4\frac{m}{k}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{6m}t^2 + C_5t + C_6 = \frac{2m}{3k}C_1\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{2m}{3k}C_2\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{3k} + \frac{F}{6m}t^2 + C_5t + C_6, \quad (18)$$

$$v_2 = \frac{dx_2}{dt} = -\frac{2m}{3k}\sqrt{\frac{3k}{m}}C_1\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{2m}{3k}\sqrt{\frac{3k}{m}}C_2\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{3m}t + C_5 = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3m}{k}}C_1\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3m}{k}}C_2\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{3m}t + C_5, \quad (19)$$

$$a_2 = \frac{dv_2}{dt} = -2C_1\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t - 2C_2\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{3m}, \quad (20)$$

С учетом (11), (20), (18) и (17)

$$x_1 = -2C_1\frac{m}{k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t - 2C_2\frac{m}{k}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{3m}\frac{m}{k} + 2\frac{2m}{3k}C_1\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + 2\frac{2m}{3k}C_2\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{2F}{3k} +$$

$$+ \frac{2F}{6m}t^2 + 2C_5t + 2C_6 -$$

$$+ C_1\frac{m}{3k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + C_2\frac{m}{3k}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t + C_3\frac{m}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_4\frac{m}{k}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t - \frac{F}{6m}t^2 - C_5t - C_6 = -C_1\frac{m}{3k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t - C_2\frac{m}{3k}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t + C_3\frac{m}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_4\frac{m}{k}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{k} + \frac{F}{6m}t^2 + C_5t + C_6, \quad (21)$$

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = C_1\sqrt{\frac{m}{3k}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t - C_2\sqrt{\frac{m}{3k}}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t - C_3\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_4\sqrt{\frac{m}{k}}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{3m}t + C_5.$$

$$a_1 = C_1\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t - C_3\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{3m}.$$

В соответствии с (20)

$$a_2(0) = -2C_1 + \frac{F}{3m} = 0, \quad C_1 = \frac{F}{6m}.$$

В соответствии с (15)

$$z(0) = 0 = \frac{F}{6m} + C_3 + \frac{F}{3m}, \quad C_3 = -\frac{F}{2m}.$$

В соответствии с (18)

$$x_2(0) = \frac{2m}{3k}C_1 + \frac{F}{3k} + C_6 = 0,$$

$$\frac{F}{9k} + \frac{F}{3k} + C_6 = 0, \quad C_6 = -\frac{4F}{9k}.$$

В соответствии с (21), (16) и (19)

$$v_1(0) = -C_2\sqrt{\frac{m}{3k}} + C_4\sqrt{\frac{m}{k}} + C_5 = 0,$$

$$v_3(0) = -C_2\sqrt{\frac{m}{3k}} - C_4\sqrt{\frac{m}{k}} + C_5 = 0, \quad C_4 = 0,$$

$$v_2(0) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3m}{k}}C_2 + C_5 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_5 = 0.$$

Окончательное решение:

$$x_1 = -\frac{F}{18k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t - \frac{F}{2k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{6m}t^2 + \frac{5F}{9k},$$

$$x_2 = \frac{F}{9k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{6m}t^2 - \frac{F}{9k},$$

$$x_3 = -\frac{F}{18k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{2k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{6m}t^2 - \frac{4F}{9k},$$

$$v_1 = \frac{F}{6\sqrt{3km}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{2\sqrt{km}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{3m}t,$$

$$v_2 = -\frac{F}{3\sqrt{3km}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{3m}t,$$

$$v_3 = \frac{F}{6\sqrt{3km}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t - \frac{F}{2\sqrt{km}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{3m}t,$$

$$a_1 = \frac{F}{6m}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{2m}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{3m},$$

$$a_2 = -\frac{F}{3m}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{3m},$$

$$a_3 = \frac{F}{6m}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t - \frac{F}{2m}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{3m}.$$

Характерный отрезок времени τ_3 для рассматриваемого случая определяется из условия максимального растяжения упругой сцепки. При этом

$$a_1(\tau_3) - \frac{F}{3m} = 0 \text{ или}$$

$$\frac{F}{6m}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}\tau_3 + \frac{F}{2m}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\tau_3 = 0,$$

$$\frac{1}{3}\cos\sqrt{3}\sqrt{\frac{k}{m}}\tau_3 + \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\tau_3 = 0.$$

Решение последнего уравнения имеет вид:

$$\sqrt{\frac{k}{m}}\tau_3 = 0,427\pi, \quad \tau_3 = 0,427\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

За время τ_3 трактор пройдет расстояние

$$x_1(\tau_3) = -\frac{F}{18k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}} \cdot 0,427\pi\sqrt{\frac{m}{k}} -$$

$$-\frac{F}{2k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot 0,427\pi\sqrt{\frac{m}{k}} +$$

$$+\frac{F}{6m}\left(0,427\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\right)^2 + \frac{5F}{9k} =$$

$$= \frac{F}{k}\left[-\frac{1}{18}\cos\sqrt{3} \cdot 0,427\pi - \frac{1}{2}\cos 0,427\pi +$$

$$+\frac{1}{6}(0,427\pi)^2 + \frac{5}{9}\right] = \frac{F}{k}\left[-\frac{1}{18}\cos\sqrt{3} \cdot 0,427\pi -$$

$$-\frac{1}{2}\cos 0,427\pi + \frac{1}{6}(0,427\pi)^2 + \frac{5}{9}\right] = 0,78\frac{F}{k}$$

и разовьет скорость

$$v_1(\tau_3) = \frac{F}{6\sqrt{3km}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}} \cdot 0,427\pi\sqrt{\frac{m}{k}} +$$

$$+\frac{F}{2\sqrt{km}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot 0,427\pi\sqrt{\frac{m}{k}} + \frac{F}{3m}0,427\pi\sqrt{\frac{m}{k}} =$$

$$= \frac{F}{\sqrt{km}}\left(\frac{1}{6\sqrt{3}}\sin\sqrt{3} \cdot 0,427\pi + \frac{1}{2}\sin 0,427\pi +$$

$$+\frac{1}{3}0,427\pi\right) = \frac{F}{\sqrt{km}}.$$

Уместно сравнить эти показатели с соответствующими величинами для недеформируемого составного сельскохозяйственного транспортно-технологического средства.

$$a = \frac{F}{3m}, \quad v = \frac{F}{3m}t, \quad x = \frac{F}{6m}t^2,$$

$$x(\tau_3) = \frac{F}{6m}\left(0,427\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\right)^2 = 0,3\frac{F}{k},$$

$$v(\tau_3) = \frac{F}{3m} \cdot 0,427\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 0,45 \frac{F}{\sqrt{mk}}.$$

$$\frac{x_1(\tau_3)}{x(\tau_3)} = 2,6, \quad \frac{v_1(\tau_3)}{v(\tau_3)} = 2,22.$$

Отношение для кинетических энергий трактора составляет

$$\frac{E_1(\tau_3)}{E(\tau_3)} = 4,93.$$

Выводы. Применение упруго деформируемых сцепок решает проблему трогания тяжелого составного сельскохозяйственного транспортно-технологического средства.

Окончательные выводы связаны главным образом с динамикой трактора. Это позволяет в полной мере достичь поставленной цели. В то же время, в работе получены все кинетические параметры для прицепных агрегатов – $x_2, x_3, v_2, v_3, a_2, a_3$, исчерпывающе достаточные для полного описания их динамики.

В таблицу сведены перемещения, скорости и кинетические энергии трактора для моментов максимального растяжения упругой сцепки, отнесенные к соответствующим параметрам недеформируемого составного сельскохозяйственного транспортно-технологического средства.

Таблица – Относительные перемещения, скорости и кинетические энергии

Количество секций комплекса	$\frac{x_1(\tau)}{x(\tau)}$	$\frac{v_1(\tau)}{v(\tau)}$	$\frac{E_1(\tau)}{E(\tau)}$
2	1,81	1,64	2,69
3	2,6	2,22	4,93

Полученные соотношения наглядно демонстрируют, что трогание составного сельскохозяйственного транспортно-технологического средства с упругими сцепками значительно легче, чем недеформируемого. При этом, чем больше число прицепных агрегатов, тем больше преимущество первого над вторым. Другими словами, за время τ_2 трактор с одним агрегатом пройдет в 1,81 раза большее расстояние и разовьет в 1,64 раза большую скорость и в 2,69 раза большую кинетическую энергию, а трактор с двумя агрегатами за время τ_3 пройдет в 2,6 раза большее расстояние и разовьет в 2,22 раза

большую скорость и в 4,93 раза большую кинетическую энергию.

Смягчение режима трогания составного сельскохозяйственного транспортно-технологического средства, по существу, обусловливается заменой одновременного трогания секций на поочередное. Выше этот процесс описан для инерционных сил. Применительно к силе трения покоя механизм будет подобным, т. е. преодолевается не вся сила трения покоя одновременно, а поочередно преодолеваются ее малые части.

Полученные выражения для перемещений, скоростей и ускорений трактора и прицепных агрегатов имеют гармонические составляющие. Для исключения продольных колебаний [13-15] составного сельскохозяйственного транспортно-технологического средства после достижения максимального растяжения сцепки следует механически блокировать возможность ее гармонического сжатия с последующей выборкой упругой деформации, например, с использованием демпфирующих устройств.

Список источников

1 Попов И.П., Чумаков В.Г., Родионов С.С., Чумакова Л.Я. Накопитель энергии для импульсной нагрузки тракторов // Вестник Курганской ГСХА. 2019. № 4 (32). С. 71-73.

2 Ворокосов И.В., Овчинников Д.Н. Повышение производительности почвообрабатывающего агрегата за счёт полного использования тягового усилия трактора // Инженерное обеспечение в реализации социально-экономических и экологических программ АПК: материалы Всероссийской (национальной) научно-практической конференции (26 марта 2020 года). Курган, 2020. С. 4-9.

3 Мекшун Ю.Н., Лопарева С.Г., Лопарев Д.В. Обоснование оптимального состава машинно-тракторного парка // Научно-техническое обеспечение агропромышленного комплекса в реализации Государственной программы развития сельского хозяйства до 2020 года: сборник статей по материалам международной научно-практической конференции, посвященной 75-летию Курганской ГСХА имени Т.С. Мальцева (18-19 апреля 2019 г.). Курган, 2019. С. 305-309.

4 Лопарева С.Г., Мекшун Ю.Н., Лопарев Д.В., Зуева О.Н. Обзор стерневых сеялок с механическими высевальными устройствами // Достижения и перспективы научно-инновационного развития АПК: материалы Всероссийской (национальной) научно-практической конференции с международным участием (27 февраля

2020 г.). Курган: Изд-во Курганской ГСХА, 2020. С. 364-369.

5 Лопарева С.Г., Мекшун Ю.Н., Фоминых А.В., Лопарев Д.В. Анализ конструкций сошников для подпочвенно-разбросного посева семян зерновых культур с механическим высевом // Техническое обеспечение технологий производства сельскохозяйственной продукции: материалы I Всероссийской научно-практической конференции (15 июня 2017 г.). Курган, 2017. С. 87-91.

6 Лопарева С.Г., Мекшун Ю.Н., Лопарев Д.В. Подпочвенно-разбросной посев сеялкой-культиватором с механическим высевом семян // Научное обеспечение реализации государственных программ АПК и сельских территорий: материалы международной научно-практической конференции (20-21 апреля 2017 г.). Курган, 2017. С. 438-442.

7 Лопарева С.Г., Мекшун Ю.Н., Фоминых А.В., Лопарев Д.В. Совершенствование технологического процесса посева стерневыми сеялками // Тракторы и сельскохозяйственные машины. 2017. № 12. С. 25-31.

8 Пономарева О.А. Активный рабочий орган культиватора-плоскореза // Современное состояние и перспективы развития агропромышленного комплекса: материалы международной научно-практической конференции (27-28 апреля 2016 г.). Курган, 2016. С. 460-463.

9 Хименков И.А. Особенности применения машин для защиты растений от сорняков // Развитие и внедрение современных наукоемких технологий для модернизации агропромышленного комплекса: сборник статей по материалам международной научно-практической конференции, посвященной 125-летию со дня рождения Терентия Семеновича Мальцева (5 ноября 2020 г.). Курган, 2020. С. 784-787.

10 Суханов А.М., Овчинников Д.Н. Энергосберегающие технологии на стадиях уборки и послеуборочной обработки зерна // Техническое обеспечение технологий производства сельскохозяйственной продукции: материалы I Всероссийской научно-практической конференции (15 июня 2017 г.). Курган, 2017. С. 125-128.

11 Хименков И.А., Артамонов М.О. Универсальная машина для уборки капусты // Техническое обеспечение технологий производства сельскохозяйственной продукции: сборник статей по материалам II Всероссийской (национальной) научно-практической конференции (14 июня 2018 г.). Курган, 2018. С. 132-137.

12 Овчинников Д.Н., Хименков И.А., Чеканов В.Ф. Механизация операций текущего

ремонта сельскохозяйственных машин // Научно-инновационные технологии как фактор устойчивого развития агропромышленного комплекса: сборник статей по материалам Всероссийской (национальной) научно-практической конференции (12 марта 2020 г.). Курган, 2020. С. 314-317.

13 Фоминых А.В. Расчет колебаний машин // Механизация и электрификация сельского хозяйства. 2006. № 12. С. 35-37.

14 Попов И.П., Чумаков В.Г., Родионов С.С., Чумакова Л.Я. Механические резонансы в технических системах агробизнеса // Вестник Курганской ГСХА. 2019. № 3 (31). С. 68-71.

15 Popov I.P. Theory of a Multi-Inert Oscillator // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2020. Vol. 49. № 8. Pp. 667-671. <http://doi.org/10.3103/S1052618820080105>

References

1 Popov I.P., Chumakov V.G., Rodionov S.S., Chumakova L.Ya. Nakopitel' energii dlya impul'snoy nagruzki traktorov [Energy storage for impulse loading of tractors]. Vestnik Kurganskoy GSKhA. 2019; (4-32): 71-73. (In Russ).

2 Vorokosov I.V., Ovchinnikov D.N. Povyshenie proizvoditel'nosti pochvoobrabatyvayushchego agregata za schet polnogo ispol'zovaniya tyagovogo usiliya traktora [Increasing the productivity of the tillage unit due to the full use of tractor traction]. Proceedings of the All-Russian (national) scientific and practical conference "Engineering support in the implementation of socio-economic and environmental programs of the agro-industrial complex" (March 26, 2020). Kurgan; 2020: 4-9. (In Russ).

3 Mekshun Yu.N., Lopareva S.G., Loparev D.V. Obosnovanie optimal'nogo sostava mashinno-traktornogo parka [Justification of optimum structure of the machine and tractor park]. Proceedings of the international academic and research conference devoted to the 75 anniversary of Kurgan GSKhA of T.S. Maltsev "Scientific and technical providing agro-industrial complex in implementation of the State program of development of agriculture till 2020" (April 18-19, 2019). Kurgan; 2019: 305-309. (In Russ).

4 Lopareva S.G., Mekshun Yu.N., Loparev D.V., Zueva O.N. Obzor sternevykh seyalok s mekhanicheskimi vysevayushchimi ustroystvami [Overview of stubble seeders with mechanical sowing devices]. Proceedings of the All-Russian (national) scientific and practical conference with international participation "Achievements and prospects for the scientific and innovative development of the agro-industrial complex" (February 27, 2020). Kur-

gan; 2020: 364-369. (In Russ).

5 Lopareva S.G., Mekshun Yu.N., Fominykh A.V., Loparev D.V. Analiz konstruktsiy soshnikov dlya podpochvenno-razbrosnogo poseva semyan zernovykh kul'tur s mekhanicheskim vysevom [Analysis of ploughshares for subsoil-scattered sowing of grain seeds with mechanical sowing]. Proceedings of the I All-Russian Scientific and Practical Conference "Technical support of agricultural production technologies" (June 15, 2017). Kurgan; 2017: 87-91. (In Russ).

6 Lopareva S.G., Mekshun Yu.N., Loparev D.V. Podpochvenno-razbrosnoy posev seyalkoy-kul'tivatorom s mekhanicheskim vysevom semyan [Podpochvenno-razbrosna sowing by a sowing cultivator with mechanical sowing of seeds]. Proceedings of the international scientific and practical conference "Scientific support for the implementation of state agro-industrial complex programs and rural areas" (April 20-21, 2017). Kurgan; 2017: 438-442. (In Russ).

7 Lopareva S.G., Mekshun Yu.N., Fominykh A.V., Loparev D.V. Sovershenstvovanie tekhnologicheskogo protsessa poseva sternevymi seyalkami [Improvement of the technological process of sowing with stubble seeders]. Tractors and agricultural machinery. 2017; (12): 25-31. (In Russ).

8 Ponomareva O.A. Aktivnyy rabochiy organ kul'tivatora-ploskoreza [Active working body of the cultivator-flat cutting]. Proceedings of the international scientific and practical conference "Current state and prospects for the development of the agro-industrial complex" (April 27-28, 2016). Kurgan; 2016: 460-463. (In Russ).

9 Khimenkov I.A. Osobennosti primeneniya mashin dlya zashchity rasteniy ot sornyakov [Features of the use of machines for protecting plants from weeds]. Proceedings of materials of the international scientific and practical conference, dedicated to the 125th anniversary of the birth of Terenty Semenovich Maltsev "Development and introduction of modern knowledge-intensive technologies for the modernization of the agro-industrial complex" (November 5, 2020). Kurgan; 2020: 784-787. (In Russ).

10 Sukhanov A.M., Ovchinnikov D.N. Energoberegayushchie tekhnologii na stadiyakh uborki i posleuborochnoy obrabotki zerna [Energy-saving technologies at the stages of harvesting and post-harvest processing of grain]. Proceedings of the I All-Russian Scientific and Practical Conference "Technical support of agricultural production technologies" (June 15, 2017). Kurgan; 2017: 125-128. (In Russ).

11 Khimenkov I.A., Artamonov M.O. Universal'naya mashina dlya uborki kapusty [Universal cabbage cleaning machine]. Proceedings of the II All-Russian (national) scientific and practical conference "Technical support of agricultural production technologies" (June 14, 2018). Kurgan; 2018: 132-137. (In Russ).

12 Ovchinnikov D.N., Khimenkov I.A., Chekanov V.F. Mekhanizatsiya operatsiy tekushchego remonta sel'skokhozyaystvennykh mashin [Mechanization of ongoing repair operations of agricultural machines]. Proceedings of the All-Russian (national) scientific and practical conference "Scientific and innovative technologies as a factor in the sustainable development of the agro-industrial complex" (March 12, 2020). Kurgan; 2020: 314-317. (In Russ).

13 Fominykh A.V. Raschet kolebaniy mashin [Calculation of machine vibrations]. Mekhanizatsiya i elektrifikatsiya sel'skogo khozyaystva. 2006; (12): 35-37. (In Russ).

14 Popov I.P., Chumakov V.G., Rodionov S.S., Chumakova L.Ya. Mekhanicheskie rezonansy v tekhnicheskikh sistemakh agrobiznesa [Mechanical resonances in technical systems of agribusiness]. Vestnik Kurganskoy GSKhA. 2019; (3-31): 68-71. (In Russ).

15 Popov I.P. Theory of a Multi-Inert Oscillator. Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2020; (49-8): 667-671. <http://doi.org/10.3103/S1052618820080105>

Информация об авторах

И.П. Попов – AuthorID 655616;

В.Г. Чумаков – доктор технических наук, профессор, AuthorID 475409;

С.С. Родионов – кандидат технических наук, доцент, AuthorID 675871;

Information about the authors

I.P. Popov – AuthorID 655616;

V.G. Chumakov – Doctor of Technical Sciences, Professor, AuthorID 475409;

S.S. Rodionov – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, AuthorID 675871;

Статья поступила в редакцию 24.12.2021; одобрена после рецензирования 10.01.2022; принята к публикации 26.05.2022.

The article was submitted 24.12.2021; approved after reviewing 10.01.2022; accepted for publication 26.05.2022.